Dispense per Ofa di comprensione logico-matematica

Prof. Tuccari Valentina

Parte 2

Equazioni
Proporzioni e percentuali
Probabilità

Equazioni e problemi

Prime definizioni

Un problema è una proposizione con la quale, noti i valori di alcune grandezze (dati), si chiede di determinarne altre (incognite) che abbiano con i dati determinate relazioni.
Sono esempi di problemi:
a) Trovare un numero eguale al suo doppio.
b) Trovare un numero razionale il cui quadrato è -1.
c) Trovare un numero naturale che moltiplicato per il quadrato del suo successivo sia uguale a 100.

Se esistono dei valori dell'incognita che verificano le condizioni del problema, allora esso si dice possibile e tali valori si dicono soluzioni del problema. Altrimenti il problema si dice impossibile.

<u>Le condizione poste in un problema in linguaggio comune si possono scrivere in forma algebrica come uguaglianze tra due espressioni. Tale forma si dice equazione del problema.</u>

Def. 1 Date due espressioni algebriche A e B e l'equazione A=B si dice che A (ovvero la quantità che sta a sinistra del segno di uguale) è il primo membro e B (cioè la quantità che sta a destra dell'uguale) è il secondo membro.

Def. 2 Date due espressioni algebriche A e B, si dice che l'equazione A=B è possibile se esiste qualche valore dell'incognita per cui è vera l'uguaglianza e tale valore si chiama soluzione dell'equazione; altrimenti l'equazione si dice impossibile. Le soluzioni di un'equazione possono essere un numero finito oppure infinite a seconda dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa trovare l'insieme di tutte le soluzioni.

Def. 3 Un'equazione si dice essere un'identità se è verificata qualunque siano i valori assegnati all'incognita (esclusi eventuali valori per cui l'espressione perde significato).

Def. 4 Un'equazione della forma $A = 0$, dove al primo membro compare un'espressione algebrica A e al secondo membro c'è zero, si dice ridotta in forma normale.

Notiamo che un'equazione A=B può essere possibile in un certo insieme di valori, ma impossibile in un altro. Ciò significa che bisogna prestare attenzione all'insieme in cui si lavora.
Ad esempio l'equazione $x + 1 = \frac{1}{2}$ ha soluzione in $\mathbb{Q}$, cioè risolvendola otteniamo $x = -\frac{1}{2}$ che è un numero razionale. Ma se considero la stessa equazione in $\mathbb{N}$ essa non ha soluzione in quanto $x = -\frac{1}{2}$ non è un numero naturale.

Nasce ora il problema di vedere come, data un'equazione, se ne possano determinare tutte le eventuali soluzioni.

Def. 5 Due equazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

E' quindi della massima importanza conoscere le trasformazioni che permettono di sostituire un'equazione con un'altra equivalente, la quale magari risulta più semplice.
Tali trasformazioni derivano da due teoremi fondamentali detti anche Principi della teoria delle equazioni o Principi di equivalenza.

PRINCIPIO DI ADDIZIONE O PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA
Se ai due membri di un'equazione si aggiunge una stessa quantità (che abbia significato), si ottiene un'equazione equivalente all'equazione data. Ovvero data l'equazione A=B, l'equazione A+C=B+C è equivalente alla prima.

Da questo principio possiamo dedurre che:
1) se si "trasportano" alcuni termini da un membro all'altro, cambiandone il segno, si ottiene un'equazione equivalente;
2) un'equazione può ridursi sempre ad un'altra equivalente nella quale uno dei due membri è zero.

PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE O SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA
Moltiplicando i due membri di un'equazione per una quantità diversa da zero , si ottiene un'equazione equivalente a quella data. Ovvero data l'equazione A=B, l'equazione A·C=B·C, dove C≠0, è equivalente.

Conseguenze di questo principio sono:
1) in un'equazione si può cambiare segno a tutti i termini dei due membri ottenendo un'equazione equivalente;
2) se tutti i coefficienti dei termini dell'equazione sono divisibili per uno stesso numero si può considerare l'equazione equivalente ottenuta dividendo ogni termine per il divisore comune;
3) se in un'equazione figura un coefficiente numerico in forma di frazione allora si può passare all'equazione equivalente i cui termini sono tutti interi, che si ottiene moltiplicando i due membri per un multiplo comune.

Osserviamo che la condizione data per cui la quantità C per cui moltiplico è diversa da zero è essenziale.
Ad esempio 2≠3, ma se moltiplico ambo i membri per zero ottengo l'identità 0=0, la quale ovviamente non è equivalente a 2≠3.
Un altro esempio è il seguente:
Consideriamo l'equazione $2x = 1$ la cui unica soluzione è $x = \frac{1}{2}$; se moltiplico ambo i membri per x (che è un'espressione che si annulla in zero) ottengo l'equazione $2x^2 = x$. Quest'ultima equazione ha due soluzioni: $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$, pertanto le due equazioni non sono equivalenti.

Def. 6 Consideriamo un'equazione in forma normale A=0, con A polinomio. Si dice grado dell'equazione il grado del polinomio A.

Consideriamo nei prossimi due paragrafi soltanto equazioni con una sola incognita e vediamo come trovarne le soluzioni.

Equazioni di primo grado in un'incognita

Un'equazione di primo grado in un'incognita è del tipo $ax + b = 0$, dove x è l'incognita e a, b sono coefficienti numerici ed $a \neq 0$ (altrimenti l'equazione si riduce all'uguaglianza $b = 0$, che è un'identità se b è zero, altrimenti è falsa).
In tal caso la soluzione, se esiste, si ottiene semplicemente applicando i due principi enunciati in precedenza. Ciò significa che si trasformerà l'equazione in una più semplice in cui si troverà ricavata l'incognita (cioè l'incognita risulterà isolata a primo membro e al secondo membro ci sarà in numero che è la soluzione dell'equazione):

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Equazioni di primo grado in due incognite

Un'equazione di primo grado in due incognite è della forma $ax + by + c = 0$, dove x, y sono le incognite e a, b, c sono coefficienti numerici ($a \neq 0$ e $b \neq 0$).
Un'equazione di questo tipo, se non è impossibile, allora ha infinite soluzioni.
Ad esempio l'equazione $x - y = 0$ ha come soluzioni tutte le coppie di numeri (x, y) dove $x = y$ (ad esempio (1,1) è una soluzione dell'equazione, come anche (4,4) e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mentre ad esempio la coppia (1,2) non è soluzione).

Sistemi di equazioni

Def. 7 Si dice sistema di equazioni, un insieme di equazioni che devono essere considerate simultaneamente.

Def. 8 Si dice soluzione del sistema un valore che è soluzione comune a tutte le equazioni del sistema.

Pertanto dato un sistema per trovare le sue soluzioni in generale devo risolvere ogni singola equazione e poi considerare le eventuali soluzioni comuni.

Def. 9 Un sistema si dice determinato se ammette un numero finito si soluzioni; si dice indeterminato se ne ammette un numero infinito; si dice impossibile se non ammette soluzioni.

Def. 10 Due sistemi si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Per concludere occupiamoci in particolare di trovare le soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

dove x, y sono le incognite e a, b, c, d, e, f sono coefficienti numerici.
Per risolvere il problema, ovvero trovare i valori delle due incognite x e y, esistono alcuni metodi.
Il primo ed unico che qui esporremo è il <u>metodo per sostituzione</u>.
Il metodo per sostituzione consiste nel ricavare da un'equazione una delle due incognite, ad esempio la x, e sostituire il valore ottenuto nell'altra equazione. In questo modo la seconda delle due equazioni diventerà con un'incognita sola e sarà possibile risolverla mediante semplici trasformazioni algebriche. Trovato così il valore di y, si potrà ottenere anche il valore di x.
Ad esempio risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

dalla prima equazione posso ricavare la x in modo da sostituirne il suo valore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = -2y \\ 2 \cdot (-2y) + 3y = 1 \end{cases}$$

la seconda equazione è nella sola incognita y perciò risolvendola ottengo

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = -1 \end{cases}$$

a questo punto posso trovare anche il valore di x sostituendo ancora una volta nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Proporzioni e percentuali

Def.1 Una proporzione è un'uguaglianza fra due rapporti, pertanto si scrive come $a : b = c : d$ e si legge " a sta a b come c sta a d ".
Il segno : è una divisione, quindi una proporzione si può anche scrivere come

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

I termini a e d si dicono estremi, i termini b e c si dicono medi.

N.B. Affinché la proporzione abbia un senso, deve risultare b, d ≠0 .

Proprietà fondamentale. In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi. Cioè se $a : b = c : d$ allora $ad = bc$.

Se uno degli estremi, o uno dei medi, è un valore incognito, grazie a questa proprietà è possibile ricavarlo.
Ad esempio se abbiamo la proporzione $a : b = c : x$, dove a, b, c sono conosciuti e x è incognita, si ha

$$x = \frac{bc}{a}$$

Def.2 Due grandezze variabili x e y si dicono **direttamente proporzionali** se il loro rapporto è costante. Tale costante prende il nome di coefficiente di *proporzionalità diretta.*
Def.3 Due grandezze variabili x e y si dicono **inversamente proporzionali** se il loro prodotto è costante. Tale costante prende il nome di coefficiente di *proporzionalità inversa.*

Problema del tre semplice. Si dicono problemi del tre semplice quelli in cui entrano in gioco due grandezze direttamente proporzionali o inversamente proporzionali e si conoscono tre valori, due relativi ad una grandezza e uno relativo all'altra grandezza, e occorre determinare il secondo valore relativo a quest'ultima.

Esempio1 Per comprare 3,5m di una certa stoffa si spende 12 euro, quanto si spende per comprare 5,7m della stessa stoffa?
Si tratta di grandezze direttamente proporzionali, quindi $^{metratura}/_{prezzo}$ è costante.
Allora la proporzione è

$$3{,}5 : 12 = 5{,}7 : x$$

Esempio2 Per imbottigliare una certa quantità di vino occorrono 150 bottiglie da 750ml. Quante bottiglie occorrerebbero per imbottigliare la stessa quantità di vino in bottiglie da 1l?
Si tratta di grandezze inversamente proporzionali, quindi $numerobottiglie \times dimensioni$ è costante. (Notiamo che, facendo il prodotto del numero di bottiglie per i 750ml di ciascuna

bottiglia, otteniamo la quantità totale di vino). Allora si ha $150 \times 750 = x \times 1000$, da cui otteniamo la proporzione

$$150 : x = 1000 : 750$$

Problema del tre composto. Si dicono problemi del tre composto quelli in cui compaiono almeno tre grandezze in proporzione a due a due tra di loro, la proporzionalità può essere diretta o inversa.
In questo caso bisogna scomporre il problema in problemi del tre semplice considerando di volta in volta solo due delle tre (o più) grandezze presenti nel problema principale.

Esempio. In un'azienda 16 operai lavorando 8 ore al giorno per 15 giorni producono 15.000 pezzi. Quanti giorni occorrerebbero per produrre, nelle stesse condizioni, 22.000 pezzi con 18 operai che lavorano 6 ore al giorno?

Conviene fare la seguente tabella:

16 operai	8 ore	15 giorni	15.000 pezzi
18 operai	6 ore	x giorni	22.000 pezzi

La colonna in cui compare la nostra incognita è la terza. Prima tutto bisogna stabilire di che tipo sono le altre grandezze rispetto alla grandezza incognita. Cioè bisogna chiedersi ad esempio per la prima colonna: tenendo costante il numero di ore lavorative e i pezzi da fare, all'aumentare degli operai cosa succede ai giorni? Si arriva facilmente alla conclusione che se ci sono più operai per fare lo stesso numero di pezzi ci vuole meno tempo, e quindi meno giorni. Pertanto la grandezza relativa alla prima colonna (n° di operai) è inversamente proporzionale alla grandezza della terza colonna (n° di giorni). Analogamente si fa con le altre colonne.
Pertanto otteniamo la seguente tabella dove la D sta per "direttamente proporzionale" e la I sta per "inversamente proporzionale".

I	**I**		**D**
16 operai	8 ore	15 giorni	15.000 pezzi
18 operai	6 ore	x giorni	22.000 pezzi

A questo punto facciamo le proporzioni tendendo conto di soltanto 2 grandezze alla volta (di cui una è sempre il numero dei giorni).
Guardiamo la prima e la terza colonna, si ha che:

$$16 : 18 = x : 15$$

da cui

$$x = \frac{16 \times 15}{18}$$

Questo non è il valore finale di x, ma è il numero dei giorni che si otterrebbero lavorando per 8 ore al giorno e facendo 15.000 pezzi.

Quindi abbiamo la seguente tabella, a cui abbiamo aggiunto una riga:

I	I		D
16 operai	8 ore	15 giorni	15.000 pezzi
18 operai	8 ore	$\frac{16\times15}{18}$ giorni	15.000 pezzi
18 operai	6 ore	x giorni	22.000 pezzi

Adesso consideriamo la seconda e la terza colonna di tale tabella(guardiamo la seconda e la terza riga). Abbiamo che:

$$8:6 = x:\frac{16\times 15}{18}$$

da cui

$$x = 8\times\frac{16\times 15}{18}\times\frac{1}{6}$$

Questo è il numero di giorni che ci vogliono se le ore giornaliere sono 6, invece che 8, considerando 18 operai che fanno 15.000 pezzi. Possiamo allora aggiungere un'altra riga intermedia alla nostra tabella:

I	I		D
16 operai	8 ore	15 giorni	15.000 pezzi
18 operai	8 ore	$\frac{16\times15}{18}$ giorni	15.000 pezzi
18 operai	6 ore	$8\times\frac{16\times15}{18}\times\frac{1}{6}$ giorni	15.000 pezzi
18 operai	6 ore	x giorni	22.000 pezzi

L'ultima cosa di cui tener conto è che i pezzi non devono essere 15.000, ma 22.000. Allora si ha, guardando la terza e la quarta riga:

$$8\times\frac{16\times 15}{18}\times\frac{1}{6}:x = 15000:22000$$

da cui

$$x = 8\times\frac{16\times 15}{18}\times\frac{1}{6}\times 22000\times\frac{1}{15000} = 26{,}07$$

Abbiamo finito: se gli operai sono 18, lavorando per 6 ore al giorno, per fare 22.000 pezzi avranno bisogno di 26,07 giorni.

Osserviamo che, stando alla primissima tabella, il valore della x è uguale al prodotto tra il valore noto (di quella grandezza), il rapporto delle altre grandezze inversamente proporzionali e l'inverso del rapporto delle altre grandezze direttamente proporzionali.

Percentuali

La percentuale è un particolare rapporto tra due grandezze a e b espresso in centesimi. Quando si dice che a è uguale al b% di c si intende che

$$a = \frac{b}{100}c$$

Che si può esprimere anche nel seguente modo

$$a: b = c: 100$$

O anche come

$$a: c = b: 100$$

Esempio1 Calcolare il 15% di 1200€.
Si ha la proporzione

$$x: 15 = 1200: 100$$

da cui

$$x = \frac{1200 \times 15}{100} = 180€$$

Esempio2 Un'automobile costa 13.500€, applicando il 7% di sconto quanto costerà?
Si ha la proporzione

$$x: 7 = 13500: 100$$

da cui

$$x = \frac{13500 \times 7}{100} = 945€$$

questo è lo sconto cioè la cifra che non si deve pagare e quindi va sottratta dal totale. Pertanto l'automobile costerà $135000€ - 945€ = 12555€$.

N.B. Si poteva fare anche un altro ragionamento: siccome mi viene scontato il 7%, io pagherò il 93% della cifra totale. Pertanto posso fare direttamente la proporzione:

$$x: 93 = 13500: 100$$

Da cui

$$x = \frac{13500 \times 93}{100} = 12555€$$

Probabilità

Prime definizioni

Si parla di *eventi probabili* o *improbabili* quando non si è sicuri se essi si verificheranno.
Possiamo dire che un evento E si dice **aleatorio** quando il suo verificarsi dipende unicamente dal caso.

Un evento E si dice **certo** quando è possibile stabilire con assoluta certezza che esso si verificherà, mentre si dirà **impossibile** quando non potrà mai realizzarsi.

La **probabilità di un evento** E è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, cioè

$$\boldsymbol{P(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}}$$

Esempio: Consideriamo l'evento E:"*nel lancio di un dado esce il numero 5*" e ci chiediamo quale sia la probabilità che tale evento si verifichi. Poiché i possibili esiti (casi possibili) del lancio sono 6 (ovvero i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6) ed uno solo è il caso favorevole (uscita del numero 5), la probabilità dell'evento è $P(E) = \frac{1}{6}$.

Notiamo che la probabilità sarà sempre compresa tra 0 e 1. Sarà zero se l'evento è impossibile e 1 se l'evento è certo.

Eventi compatibili o incompatibili

Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.
Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **compatibili** quando il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro e i due eventi possono verificarsi contemporaneamente.

Si può provare che:

La **probabilità dell'unione di due eventi incompatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento, cioè

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

La **probabilità dell'unione di due eventi compatibili** è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento diminuita delle probabilità dell'evento comune $E_1 \cap E_2$, cioè

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Esempio: *Consideriamo il lancio di un dado e chiamiamo E_1 l'evento:"esce il numero 1" ed E_2 l'evento:"esce il numero 6".*
I due eventi sono incompatibili, pertanto la probabilità dell'evento E:"esce il numero 1 oppure esce il numero 5" è data dalla somma delle probabilità dei due eventi, cioè

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esempio: *Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte un re o una carta di denari?*
Sia E_1 l'evento "viene estratta una carta di denari" e E_2 "viene estratto un re". I due eventi sono compatibili. Per trovare la probabilità richiesta, calcoliamo quindi:

$$P(E_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, \qquad P(E_2) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}, \qquad P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{40}$$

Pertanto

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

Eventi dipendenti o indipendenti

Supponiamo di trovarci di fronte a due eventi compatibili e di dover calcolare la probabilità che si verifichi sia l'uno che l'altro. Ci chiediamo: il verificarsi di un evento influisce sulla probabilità di verificarsi dell'altro?

Due eventi compatibili E_1 ed E_2 si dicono **indipendenti** se il verificarsi dell'uno non influisce sul calcolo della probabilità del verificarsi dell'altro.
Due eventi compatibili E_1 ed E_2 si dicono **dipendenti** se il verificarsi dell'uno influisce sul calcolo della probabilità del verificarsi dell'altro.

La probabilità dell'intersezione di due **eventi compatibili indipendenti** E_1 ed E_2 è data dal prodotto delle probabilità di ciascun evento, ovvero:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

La probabilità dell'intersezione di due **eventi compatibili dipendenti** E_1 ed E_2 è data dal prodotto della probabilità di un evento per la probabilità condizionata dell'altro, cioè:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

dove $P(E_2|E_1)$ si chiama probabilità condizionata ed è la probabilità che si verifichi E_2 sapendo che si è verificato E_1.

Esempio: *Sia data un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo ogni estrazione la pallina venga rimessa nell'urna, calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.*

Iniziamo col distinguere i due eventi E_1:"si estrae la pallina numero 5" ed E_2:"si estrae la pallina numero 6". Sono eventi indipendenti, perché l'estrazione avviene con restituzione.
Quindi

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$$

Esempio: *Sia data un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che una volta estratta la pallina essa non venga rimessa nell'urna, calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.*

In questo caso gli eventi E_1:"si estrae la pallina numero 5" ed E_2:"si estrae la pallina numero 6" sono dipendenti, in quanto non rimettendo la prima pallina estratta nell'urna il verificarsi dell'evento E_2 è stato influenzato dall'evento E_1, quindi:

$$P(E_1) = \frac{1}{10}, \qquad P(E_2|E_1) = \frac{1}{9}$$

E quindi

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90} = 0{,}011 = 1{,}1\%$$

Osservazione: Se due eventi sono indipendenti, la probabilità condizionata di un evento rispetto ad un altro coincide con la probabilità dell'evento stesso

$$P(E_2|E_1) = P(E_2)$$

In altre parole, la probabilità che si verifichi E_2 sapendo che si è verificato E_1 è uguale alla probabilità che si verifichi E_2.

Esercizi – Simulazione Test

1) Nel paese di Burgundopoli tutti gli uomini d'affari sono milionari; i più ricchi tra loro sono calvi e bassi. Alcuni mediatori sono pure milionari e alcuni di essi sono calvi e bassi.
Quale delle affermazioni seguenti è certamente falsa?

- Il signor De Paperis è un uomo d'affari alto e bruno
- Una persona povera può essere calva e bassa
- Non ci sono mediatori alti e bruni
- Nessuna delle precedenti

2) Nella Repubblica di Maraviglia c'è un paese di nome Ernesti, in cui tutti gli abitanti sono biondi. Nello stato di Maraviglia nessun biondo è disonesto. L'attuale presidente dello stato è alto e bruno.
Quale delle seguenti affermazioni e sicuramente falsa?

- Nessun disonesto è di Ernesti
- Il Presidente è un onesto Ernestiano
- Nessun Ernestiano è disonesto
- Non c'è alcuna persona onesta che non sia Ernestiana
- L'attuale Presidente è disonesto

3) Il 5 Dicembre Carla ha visto in un negozio un abito che costava 200€. Tornando in quel negozio in periodo di saldi Carla riesce ad acquistare l'abito per soli 44€. Che percentuale di sconto ha applicato il negozio?

- 22%
- 78%
- 65%
- Nessuna delle precedenti

4) Siano $n, m \in \mathbb{N}$, se $n \cdot m$ è dispari cosa posso dire sui due numeri n ed m?

- n, m devono essere primi
- n è pari ed m dispari
- Devono essere entrambi dispari
- Non posso dire niente su n ed m

5) Fra 3 anni Marco avrà il doppio dell'età che Sara aveva tre anni fa, mentre ora il quadruplo degli anni di lui è pari al quintuplo degli anni di lei. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si può dedurre che Sarà è più vecchia di Marco
- I due hanno la stessa età
- Sara ha 12 anni
- Fra un anno Sarà avrà tanti anni quanti ne aveva Marco un anno fa

6) In un gruppo di 100 studenti di lingue 51 parlano solo inglese, 25 parlano sia inglese che francese, 4 parlano solo arabo e 10 parlano spagnolo e francese. Quanti sono gli studenti che sanno parlare solo il francese?

- 10
- 25
- nessuno

- 35

7) Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa. Il polinomio $x^2 - 4$:
- Ha 10 zeri
- ha grado complessivo 3
- 2 è uno zero del polinomio
- Nessuna delle precedenti

8) Giovanni ha nel salvadanaio 70€ in monete da 1€ e da 2€. Sapendo che il numero dei pezzi da 1€ è maggiore di quello da 2€ e che la differenza tra il numero di pezzi da 1€ e il numero di pezzi da 2€ è 10 cosa può dire?
- Non si può dire niente
- I pezzi da 1€ sono 30
- Si può sapere solo il numero dei pezzi da 1€, ma non quello dei pezzi da 2€
- Nessuna delle precedenti

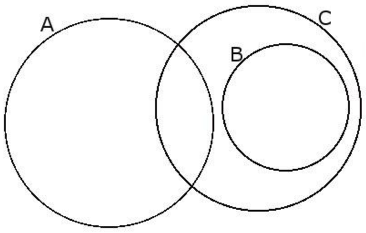
9) Condizione … … … affinché un numero sia divisibile per 10 è che sia divisibile per 5. Completa la frase in modo corretto:
- necessaria
- sufficiente
- necessaria e sufficiente
- nessuna delle precedenti

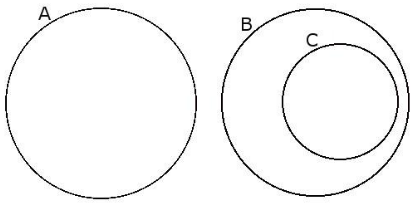
10) Dato l'insieme $\{4, 10, x, mela\}$ quanti elementi ha l'insieme delle parti?
- 8
- 16
- 14
- 20

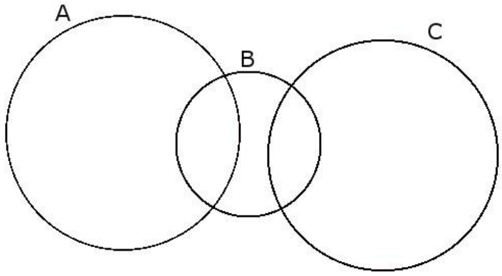
11) Considerato l'insieme {1,4,7,10,13,16,19,22,25….} dire quale delle seguenti è la rappresentazione caratteristica:
- $\{x \in \mathbb{N} | \ x = 1 + 2n^2, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} | \ x = n + 3, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} | \ x = n^2, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} | \ x = n + 4, \forall n \in \mathbb{N}\}$

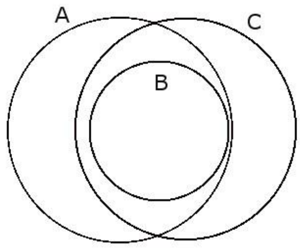
12) Consideriamo l'insieme $\{3,7,11,15,19,23,27,31 \dots\}$, trovata la caratteristica dell'insieme possiamo dire che il numero successivo che compare nella sequenza è:
- 40
- 33
- 35
- 41

13) Se A, B, C sono 3 insiemi tali che $A \cap B = \emptyset$, $B \subseteq C$ e $C \cap A \neq \emptyset$, quale dei seguenti diagrammi di Eulero-Venn rappresenta le relazioni tra i tre insiemi A, B, C?









14) Gli alunni di una scuola formano un insieme U, consideriamo i seguenti insiemi:
$A = \{x \in U \mid x\ studia\ francese\}$, $B = \{x \in U \mid x\ studia\ solo\ francese\ o\ solo\ inglese\}$,
$C = \{x \in U \mid x\ studia\ inglese\}$, $D = \{x \in U \mid x\ studia\ francese\ e\ tedesco\}$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ○ $A \subseteq B$
- ○ $B = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$
- ○ $B \cap C \neq \emptyset$
- ○ $A \cup C \subseteq D$

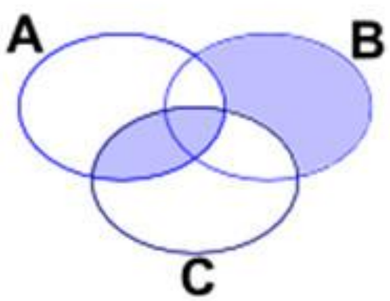
15) Se considero l'insieme delle cifre C, cioè C={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, l'insieme delle parti di C ha:

- ○ 10 elementi
- ○ 100 elementi
- ○ 40 elementi
- ○ 1024 elementi

16) In un gruppo di 25 ragazzi, 4 collezionano figurine di calciatori e di cantanti, 12 solo di calciatori e 4 non sono collezionisti. Quanti ragazzi collezionano solo figurine di cantanti?

- ○ 9
- ○ 5
- ○ 13
- ○ nessuno

17) Dire a cosa corrisponde la parte colorata della seguente figura



- $A \cup C \cup B$
- $(A \cap C) \cup B$
- $(A \cap C) \cup [B \setminus (A \cup C)]$
- $B \setminus (A \cup C)$

18) Marco voleva un gatto che fosse bianco e grasso oppure nero e magro. Gli è stato regalato un gatto di nome Tigre, ma i desideri di Marco non sono stati soddisfatti. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- Se Tigre è bianco allora non è magro
- Se Tigre è bianco allora non è grasso e, se invece è nero, allora non è magro
- Tigre non è né bianco, né nero, né grasso, né magro
- Se tigre è striato allora è magro

19) Premesso che:
1. Chi ascolta musica rock o blues non è stonato
2. Caio non è stonato
3. Chi ascolta blues non vince al Lotto
Quale delle seguenti conclusioni non si può trarre dalle precedenti premesse?

- Non è escluso che Caio ascolti rock
- Chi vince al Lotto non ascolta blues
- Uno stonato non ascolta rock
- E' impossibile che Caio ascolti blues

20) Danilo, che abita a Catania, decide di andare in macchina a Roma a trovare un amico. Sapendo che per arrivare a Roma dovrà percorrere in tutto 800 Km e sapendo che lo 0,75% del percorso lo farà sul traghetto, quanti km percorrerà effettivamente guidando la macchina?

- 794 km
- 500 Km
- 6 km
- Nessuna delle precedenti

21) Il prodotto di un numero per il suo successivo è

- Un numero pari
- Un numero dispari
- Un numero primo

- Non si sa

22) Tenendo conto che voglio attraversare una strada dove c'è un semaforo pedonale, completa la seguente frase in modo corretto: "Condizione … … … affinché io possa attraversare la strada è che il semaforo sia verde".

- necessaria
- sufficiente
- necessaria e sufficiente
- nessuna delle precedenti

23) Dato il polinomio $\mathrm{p}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2\mathrm{y} - 2y^2 - \frac{1}{3}xy - 6$, quale delle seguenti coppie (x, y) è uno zero del polinomio?

- $(1,1)$
- $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$
- $(3,1)$
- $(0,0)$

24) Considerato $\{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101 \dots\}$ trovare la rappresentazione caratteristica:

- $\{x \in \mathbb{N} |\ x = 1 + n^2, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} |\ x = n + 3, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} |\ x = n^3, \forall n \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} |\ x = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$

25) Il Sig. Rossi dice a suo figlio: "Oggi arriverà dall'America la zia Gladis insieme alle tue due cugine Mary ed Ester." Il figlio vuol sapere quanti anni hanno, il padre allora gli risponde "La più grande, Mary, ha il doppio dell'età di Ester aumentata di 3. Mentre il triplo dell'età di Ester è uguale all'età che aveva Mary un anno fa". Allora il figlio del signor Rossi può dedurre che

- dovrà aspettare di vedere le cugine per sapere la loro età
- la più piccola ha 10 anni
- Hanno la stessa età
- Mary ha 7 anni

26) Consideriamo l'insieme $\{2,4,8,16,32,64,128 \dots\}$, trovata la caratteristica dell'insieme possiamo dire che il numero successivo che compare nella sequenza è:

- 130
- 256
- 35
- Nessuno dei precedenti

27) Sapendo che 21 impiegati donne costituiscono il 60% degli impiegati totali di un'azienda, calcolare gli quanti sono gli impiegati uomini.

- 14
- 21
- 35
- Nessuno dei precedenti

28) Un panificio produce, con 50Kg di farina, 300 panini da 100gr ciascuno. Per fare 425 panini da 120gr ciascuno quanti chilogrammi di farina occorrono?

- 85Kg
- 60kg
- 75kg
- Nessuno dei precedenti

29) Un automobilista che viaggia 6 ore al giorno alla velocità media di 110 km/h impiega 4 giorni a compiere un certo percorso. Quanto tempo impiegherebbe a fare lo stesso percorso viaggiando 4 ore al giorno alla velocità di 120 km/h?

- 5,5 giorni
- 4,36 giorni
- 2,6 giorni
- Nessuno dei precedenti

30) Una scatola contiene 12 cioccolatini: 4 sono fondenti e 8 al latte. Tre cioccolatini vengono estratti a caso dalla scatola uno dopo l'altro. Qual è la probabilità P che i tre cioccolatini estratti siano al latte?

- 0,25%
- 0,45%
- 0,66%
- Nessuno dei precedenti