ABILITÀ LOGICO – MATEMATICHE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE POLITICHE E SOCIALI
A.A. 2019-2020

LA TEORIA DEGLI INSIEMI

Cos'è un insieme?

Il concetto di insieme è un ente primitivo. Esso non viene definito e gli si attribuisce semplicemente il significato intuitivo che il termine stesso suggerisce.
Un **insieme**, in Matematica, è un raggruppamento di elementi di qualsiasi tipo (numerico, logico, concettuale) che può essere individuato mediante una caratteristica comune agli elementi che gli appartengono oppure per semplice elencazione degli elementi dell'insieme.
ATTENZIONE! Da un punto di vista matematico un insieme è un raggruppamento di elementi per il quale è possibile decidere senza dubbio se un elemento vi appartiene o no. Inoltre i suoi elementi devono essere tutti distinti fra loro.
Ad esempio:

- I film interessanti non costituiscono un insieme matematico, in quanto non esiste un criterio univoco che permette di stabilire se un film è o non è interessante
- I numeri naturali comprese tra 10 e 20 così come le vocali della parola "*insieme*" costituiscono, invece, degli insiemi matematici in quanto i loro elementi sono univocamente determinati.

Per evitare ambiguità ed equivoci, gli oggetti che costituiscono un dato insieme devono essere tutti ben definiti e distinguibili l'uno dall'altro. Inoltre, deve essere sempre possibile poter stabilire con esattezza se un oggetto x appartiene o no all'insieme considerato.
Generalmente, gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto (A,B,…,Z), mentre per gli elementi si utilizzano le lettere minuscole (a,b,…, z).
Sia A un insieme. Per indicare che un oggetto x è elemento di A, scriveremo $x \in A$. Il simbolo $\in$ si chiama simbolo di appartenenza e la scrittura $x \in$A si legge "x appartiene all'insieme A". Se un elemento non appartiene all'insieme scriveremo $x \notin A$.

Esempio: Indicato con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, si ha:

$$5 \in \mathbb{N}, \qquad 137 \in \mathbb{N}, \qquad -3 \notin \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Un insieme si dice **finito** se contiene un numero finito di elementi, mentre si dice **infinito** se ha infiniti elementi.
Il simbolo $\emptyset$ si dirà **insieme vuoto** ed indicherà insiemi privi di elementi.
Nel caso in cui un insieme contiene un solo elemento, esso si dirà insieme **unitario**.

Rappresentazioni di un insieme

Per indicare quali elementi appartengono a un insieme esistono diverse modalità di rappresentazione.
La **rappresentazione per elencazione** di un insieme prevede di indicare tutti gli elementi che appartengono ad un insieme semplicemente elencandoli uno ad uno, all'interno di parentesi graffe.
Ad esempio: se A è l'insieme delle vocali dell'alfabeto, si scrive A={a,e,i,o,u}; se B è l'insieme dei numeri 3,6,9 si scrive B={3,6,9}.
Osserviamo che quando si scrive un insieme per "elenco", non ha mai importanza l'ordine con cui si scrivono gli elementi, come non ha senso ripetere più volte nell'elenco un medesimo elemento.

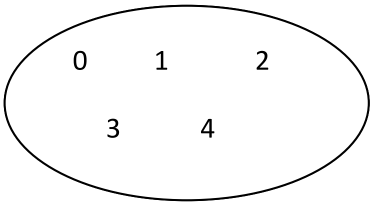
Un altro modo per individuare un insieme è la **rappresentazione per caratteristica**, che consiste nel dare una proprietà che risulti verificata da <u>tutti</u> gli elementi dell'insieme e <u>solo</u> da essi. Più esattamente, dato un insieme T ed una proprietà $P(x)$ che abbia senso per gli elementi di T, la scrittura $A=\{x\in T : P(x)\}$ indica l'insieme di tutti gli elementi di T che verificano la proprietà $P(x)$.
Ad esempio: se $\mathbb{Z}$ è l'insieme di tutti gli interi relativi, la scrittura $A=\{x\in\mathbb{Z} : x>100\}$ indica l'insieme di tutti gli interi relativi maggiori di 100.
Infine, con la **rappresentazione grafica** ogni insieme viene rappresentato con una regione di piano limitata da una curva chiusa. Si intende che gli elementi dell'insieme stanno all'interno della linea chiusa, gli elementi che non appartengono all'insieme stanno all'esterno. Forme grafiche di questo tipo sono generalmente denominate diagrammi di <u>Eulero-Venn</u>, ed offrono un supporto intuitivo notevole nel rappresentare gli insiemi.

Esempio: Sia A l'insieme dei numeri naturali minori di 5.

<u>Rappresentazione per elencazione</u>: A = {0, 1, 2, 3, 4}

<u>Rappresentazione per caratteristica</u>: A = {x | x è un numero naturale minore di 5}
e si legge "*A è l'insieme formato dagli elementi x, tali che x è un numero naturale minore di 5*"

<u>Rappresentazione grafica</u>:



Esercizio: Per ognuno dei seguenti insiemi, dati per "elenco", si fissino un insieme T ed una o più proprietà P(x) che li possano definire:

$$A=\{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$
$$B=\{2, 4, 8, 32, 256, \ldots\}$$
$$C=\{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Operazioni tra insiemi e proprietà

Un insieme B viene detto **sottoinsieme** di un insieme A se tutti gli elementi di B sono elementi di A. Si scrive $B\subseteq A$.
Il simbolo $\subseteq$ viene detto simbolo di inclusione. La scrittura $B\subseteq A$ (o $A\supseteq B$) si legge "B è contenuto in A" (o "A contiene B").
Se esiste un elemento di A che non appartiene a B, l'insieme B si dice <u>sottoinsieme proprio</u> di A e si scrive $B\subset A$.
L'inclusione $\subseteq$ gode delle proprietà:

- $A\subseteq A$;
- Se $C\subseteq B$ e $B\subseteq A$, allora $C\subseteq A$.

Esempio: Consideriamo i due insiemi

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$
$$B = \{2; 4; 6; 8\}$$

Si osserva che tutti gli elementi di B sono anche elementi di A.

Due insiemi A e B si dicono **uguali** se $A\subseteq B$ e $B\subseteq A$. Si scrive $A=B$.

In altre parole, A=B se ogni elemento di A è pure elemento di B e ogni elemento di B è pure elemento di A.
Osserviamo che se a è elemento di un insieme A, l'insieme $\{a\}$ è un sottoinsieme di A. L'elemento a e l'insieme $\{a\}$ hanno natura diversa e devono quindi considerarsi distinti. Si scrive: $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$.

Dato un insieme A, si dice **insieme delle parti** di A, e si indica con P(A), l'insieme avente per elementi tutti i sottoinsiemi di A (propri e impropri).

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Essendo $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$, $\emptyset$ e A sono elementi di P(A). Si scrive $\emptyset \in P(A)$ e $A \in P(A)$.
Se l'insieme A è formato da n elementi, l'insieme delle parti è formato da 2^n elementi.

Esempio: Determinare P(A) nel caso in cui A = {a,b,c,d}.
Ricordiamo intanto che ogni insieme possiede tra i suoi sottoinsiemi $\emptyset$ ed A stesso.
I sottoinsiemi con un solo elemento sono

{a}; {b}; {c}; {d}

Quelli con due elementi sono

{a,b}; {a,c}; {a,d}; {b,c}; {b,d}; {c,d}

E quelli con tre elementi sono

{a,b,c}; {a,b,d}; {a,c,d}; {b,c,d}

In definitiva, P(A) conterrà 16 elementi:

P(A) = {A; $\emptyset$; {a}; {b}; {c}; {d}; {a,b}; {a,c}; {a,d}; {b,c}; {b,d}; {c,d}; {a,b,c}; {a,b,d}; {a,c,d}; {b,c,d}}

Dati due insiemi A e B, si dice **unione** di A e B, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad A e da tutti quelli che appartengono a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

La definizione di unione insiemistica si appoggia sull'operatore logico "*o*", $\vee$, alternativa: infatti, $A \vee B$ è vero se almeno uno dei due tra A e B è vero, così come d'altra parte $A \cup B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due tra A e B.

Si dice **intersezione** di due insiemi A e B, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato da tutti quegli elementi che appartengono sia ad A che a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

La definizione di intersezione insiemistica si appoggia sull'operatore logico "*e*", il cui simbolo è $\wedge$ (congiunzione): infatti $A \wedge B$ è vero se e solo se sia A che B sono veri, così come d'altra parte $A \cap B$ è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Si dice **differenza** di due insiemi A e B, e si indica con A\B, l'insieme formato da tutti quegli elementi che appartengono ad A ma non a B.

Esempio: Se A={a,b,c,d} e B={c,d,e} risulta
$A \cup B$={a,b,c,d,e}; $A \cap B$={c,d}; A\B={a,b}; B\A={e}.

Due insiemi A e B tali che A∩B=∅ (cioè senza elementi in comune) si dicono **disgiunti**.

Si è visto che esistono insiemi del tipo $\{x\}$, $\{x,y\}$,$\{x,y,z\}$, dove si intende che x, y, z sono elementi tra loro distinti. Gli insiemi del tipo $\{x,y\}$ si dicono coppie, quelli del tipo $\{x,y,z\}$ si dicono terne (o triple). Due coppie come $\{x,y\}$ e $\{y,x\}$ costituiscono insiemi uguali.

Dati due elementi x, y, si dice coppia ordinata (x,y) l'insieme avente per elementi gli insiemi $\{x\}$ e $\{x,y\}$

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

È possibile osservare che

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$
$$(y,x)=\{\{y\},\{y,x\}\}$$

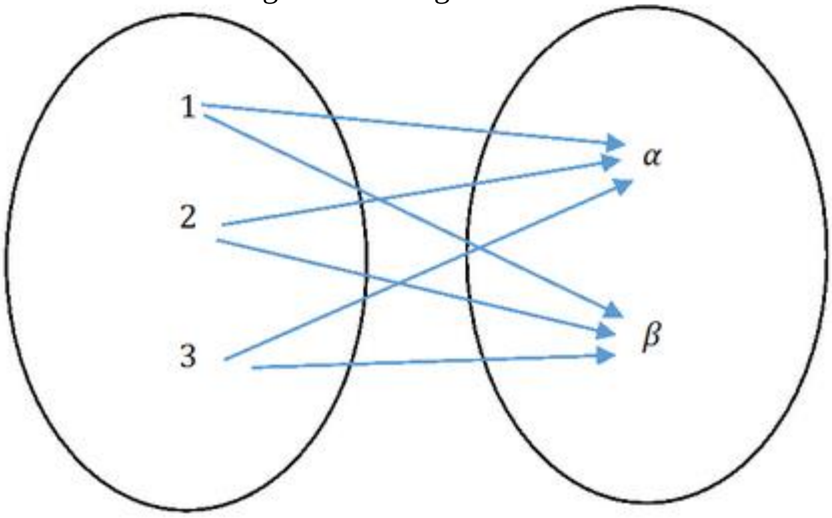
da cui risulta $(x,y)\neq(y,x)$, per $x\neq y$.
Data la coppia ordinata (x,y), l'elemento x si dirà primo elemento della coppia, l'elemento y secondo elemento della coppia.
In modo analogo si possono definire le terne ordinate, le quaterne ordinate, …

Dati due insiemi non vuoti A e B, si dice insieme **prodotto** AxB, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a,b) con $a\in$A e $b\in$B.

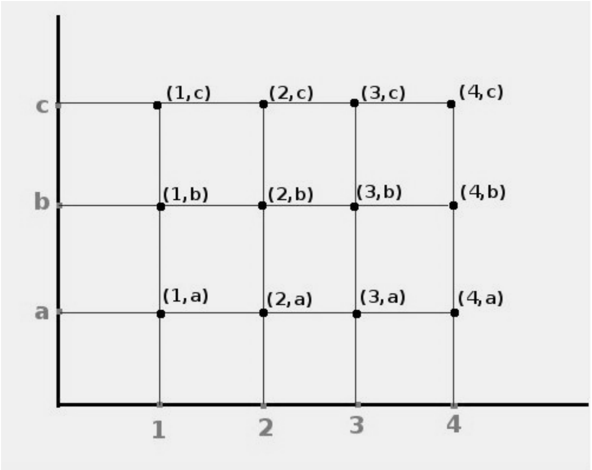
$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Il prodotto cartesiano può essere rappresentato in diversi modi.

- **Rappresentazione sagittale**: si rappresentano gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn e poi mediante frecce si collegano tra loro gli elementi dei due insiemi.



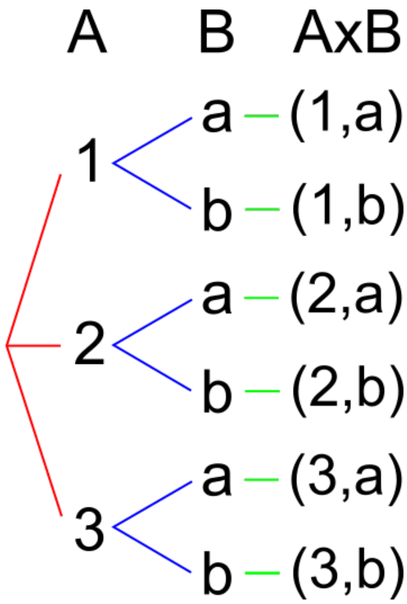
- **Rappresentazione cartesiana**: consiste nel disporre gli elementi di A e di B su due rette perpendicolari orientate e nel tracciare delle rette parallele agli in corrispondenza dei vari elementi, i punti di intersezione trovati rappresentano le coppie di A × B.



- **Rappresentazione con tabella a doppia entrata**: nella prima colonna della tabella si mettono gli elementi di A e nella prima riga gli elementi di B, di conseguenza si trovano nelle caselle tutte e sole le coppie del prodotto cartesiano.

A \ B	a	b	c	d
1	(1,a)	(1,b)	(1,c)	(1,d)
2	(2,a)	(2,b)	(2,c)	(2,d)
3	(3,a)	(3,b)	(3,c)	(3,d)

- **Rappresentazione con diagramma ad albero**:



Esempio: Se A={*a*,*b*,*c*} e B={1,2}, si ha:

AxB={(*a*,1), (*a*,2), (*b*,1), (*b*,2), (*c*,1), (*c*,2)}
BxA={(1,*a*), (1,*b*), (1,*c*), (2,*a*), (2,*b*), (2,*c*)}

Esercizio: Siano dati due insiemi A={1, 3, 4, 5} e B={1, 3, 9, 6, 5}.
Trovare A∩B, A∪B, A\B, B\A e (A∩B)x(A\B).

Esercizio: Siano dati tre insiemi A={1, 3, 5}, B={3, 6} e C={5, 3, 2, 1}.
Trovare A∩B, A∩C, A∩B∩C e A∪B∪C.

Esercizio: Si scrivano gli insiemi AxB e BxA, essendo A={1, 2, 3, 4} e B={a, b, c}

Esercizio: Siano dati i due insiemi A={1, 2, 3, 4, 5} e B={3,4,5,6,7}.
Si scrivano A∪B, A∩B e A\B.

Esercizi: Per ciascuna delle seguenti domande, individuare la risposta esatta.

1. L'intersezione tra due insiemi A e B:
   a) Non può essere mai vuota
   b) Contiene alcuni elementi di A e alcuni di B
   c) È l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e a B
   d) Esiste solo se A e B non sono vuoti

2. Dati due insiemi qualunque A e B:
   a) $A \cap B = B \cap A$
   b) $A \cap B = \emptyset$
   c) $A \cap B \neq B \cap A$
   d) $A \cap B \neq \emptyset$, sempre

3. L'unione tra due insiemi A e B:
   a) Non può essere mai vuota
   b) È l'insieme formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elementi di B
   c) È l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B
   d) Esiste solo se A e B non sono vuoti

4. Dati due insiemi qualunque A e B:
   a) $A \cup B = A$
   b) $A \cup B = B$
   c) $A \cup B = B \cup A$
   d) $A \cup B \neq B \cup A$, sempre

5. Dati due insiemi A e B, con A⊆B, la scrittura B\A:
   a) Non ha senso
   b) È l'insieme formato dagli elementi che stanno in B, ma non in A
   c) È l'insieme degli elementi che stanno in A, ma non in B
   d) È l'insieme degli elementi che stanno sia in B che in A

6. Se A⊆E:
   a) $E \setminus A = A \setminus E$
   b) $E \cup (E \setminus A) = A$
   c) $E \cap (E \setminus A) = E \setminus A$
   d) $(E \setminus A) \cup (E \setminus A) = A$

7. A quale dei seguenti insiemi è uguale l'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4 < x < 8\}$:

a) A = {4, 5, 6, 7}
b) A = {5, 6, 7, 8}
c) A = {0, 2, 4, 6, 8}
d) A = {5, 6, 7}

8. A quale dei seguenti insiemi è uguale l'insieme $A = \{x \mid x \neq x\}$:
a) A = {∅}
b) A = {0}
c) A = ∅
d) A = P(∅)

9. Dire a quali dei seguenti insiemi è uguale l'insieme A = {1, 2, 3}:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\}$
b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 3\}$
c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$
d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 0 < x < 4\}$

10. Dire quali dei seguenti insiemi non sono sottoinsiemi di A = {a, b, c}:
a) {a, b, c}
b) ∅
c) {a, b}
d) {∅}
e) {a, b, c, d}

11. Dire qual è l'insieme A sapendo che P(A) = {∅, {1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {3,5}, A}:
a) A = {1, 3, 5}
b) A = {∅, 1, 3, 5}
c) A = {1, 1, 3, 3, 5, 5, 5}

12. Siano A = {1, 2, 3} e A∪B = {1, 4, 5, 6, 3, 2}. Trovare l'insieme B tra i seguenti insiemi:
a) B = {5, 6}
b) B = {1, 4, 5, 6}
c) B = {4, 5, 6, 7}
d) B = {1, 2, 3, 4}

13. Dati due insiemi non vuoti, A e B, la scrittura AxB rappresenta:
a) L'insieme degli elementi comuni ad A e B
b) L'insieme delle coppie ordinate (a,b), con a∈A e b∈B
c) L'insieme delle coppie comuni ad A e B

14. Dato un insieme A:
a) A x ∅ = A
b) A x ∅ = ∅
c) A x ∅ non esiste

Insiemi numerici

ABILITÀ LOGICO – MATEMATICHE
DIPARTIMENTO DI SCIENZE POLITICHE E SOCIALI
A.A. 2019-2020

Gli insiemi numerici sono dei particolari insiemi infiniti, cioè raggruppamenti di numeri formati da infiniti elementi e classificati in base a determinate caratteristiche comuni.

L'**insieme $\mathbb{N}$** è l'insieme dei numeri naturali. I suoi elementi sono tutti i numeri interi non negativi.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

L'**insieme $\mathbb{Z}$** è l'insieme dei numeri interi relativi. Gli elementi di questo insieme sono tutti i numeri interi caratterizzati da un segno, che può essere positivo (+), negativo (-) o nullo: in particolare, l'unico elemento con segno nullo è lo zero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

L'**insieme $\mathbb{Q}$** è l'insieme dei numeri razionali relativi, cioè di quei numeri che si esprimono attraverso una frazione e sono preceduti da segno positivo (+), negativo (-) o nullo.
Gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$ si presentano nella forma $\frac{a}{b}$, dove a e b sono due qualsiasi numeri interi positivi, con b diverso da zero.

$$c \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow c = \frac{a}{b} \text{ con } a,b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0$$

L'**insieme $\mathbb{I}$** è l'insieme dei numeri irrazionali, cioè di quei numeri che non possono essere espressi attraverso una frazione. Gli elementi di questo insieme sono tutti i numeri decimali illimitati non periodici, cioè quei numeri per cui non esiste una frazione generatrice: ad esempio $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt[3]{5}$.

L'**insieme $\mathbb{R}$** è l'insieme dei numeri reali ed definito come l'unione tra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri irrazionali.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Pertanto i suoi elementi sono quei numeri che possono essere espressi attraverso una rappresentazione decimale, sia limitata che illimitata, sia periodica che non periodica: cioè, sono tutti quei numeri positivi e negativi (zero incluso) che ci vengono in mente e con cui abbiamo a che fare nella vita di tutti i giorni.